ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

3ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f,g : X \to Y$ δύο συνεχείς συναρτήσεις.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $F = \{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Να δώσετε δύο διαφορετικές αποδείξεις. Η πρώτη απόδειξη να γίνει με χρήση ακολουθιών. Η δεύτερη απόδειξη να γίνει αποδεικνύοντας ότι το συμπλήρωμα του F είναι ανοικτό σύνολο.
β) Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X ώστε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$, δείξτε ότι $f = g$.

2) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο βασικές ακολουθίες στο X. Να δείξετε ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\rho(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

3) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) ώστε το σύνολο $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ των όρων της να μην είναι κλειστό. Να δείξετε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

4) Δώστε παράδειγμα μιας φθίνουσας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

5) Δώστε παράδειγμα μιας φθίνουσας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, ώστε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

6) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
(i) Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.
(ii) Υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $G = f^{-1}(V)$.

7) Έστω (X,ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος.
α) Αν $f : X \to X$ είναι μια συνάρτηση συστολής, και $g : X \to X$ μια συνάρτηση ώστε να ισχύει $f \circ g = g \circ f$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = x = g(x)$.
β) Αν $f : X \to X$ είναι μια συνάρτηση και $k \in \mathbb{N}$ ώστε η f^k (όπου $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$) να είναι συνάρτηση συστολής, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = x$.

8) Ορίζουμε $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $d\Big((a,\beta),(\gamma,\delta)\Big) = \begin{cases} |\delta - \beta|, & \text{αν } a = \gamma \\ |\beta| + |\gamma - a| + |\delta|, & \text{αν } a \neq \gamma. \end{cases}$
α) Δείξτε ότι η d είναι μετρική στο $\mathbb{R}^2$.
β) Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία (κάνοντας σχήμα) της μετρικής d.
γ) Αν $x,y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η ακολουθία $(x, y+\frac{1}{n})$ είναι πάντα συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{R}^2,d)$.
δ) Αν $x,y \in \mathbb{R}$ να εξετάσετε πότε η ακολουθία $(x+\frac{1}{n}, y)$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{R}^2,d)$. [Υπόδειξη: Να διαχωρίσετε τις περιπτώσεις $y = 0$ και $y \neq 0$.]
ε) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g : (\mathbb{R}^2,d) \to (\mathbb{R}^2,d)$ με $g(x,y) = (y,x)$ δεν είναι συνεχής [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αρχή της μεταφοράς και τα προηγούμενα δύο ερωτήματα]
στ) Αν $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{R}^2$ και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $(x_n,y_n) \xrightarrow{d} (x,y)$ αν και μόνο αν (....) Συμπληρώστε και αποδείξτε την παραπάνω πρόταση. (Χρειάζεται πάλι διαχωρισμός των περιπτώσεων $y = 0$ και $y \neq 0$. Θα σας δοθεί στην τάξη αργότερα η ακριβής συμπλήρωση).
ζ) Δείξτε ότι οι προβολές $P,Q : (\mathbb{R}^2,d) \to \mathbb{R}$ με $P(x,y) = x$ και $Q(x,y) = y$ είναι συνεχείς (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό που θα έχει δειχθεί στο προηγούμενο ερώτημα και την αρχή της μεταφοράς).
η) Αν ρ είναι η ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{R}^2$ να εξετάσετε αν η ταυτοτική συνάρτηση $I : (\mathbb{R}^2,d) \to (\mathbb{R}^2,\rho)$ είναι συνεχής και αν η ταυτοτική συνάρτηση $J : (\mathbb{R}^2,\rho) \to (\mathbb{R}^2,d)$ είναι συνεχής.